1. Gyakorlat

Függvények határértéke

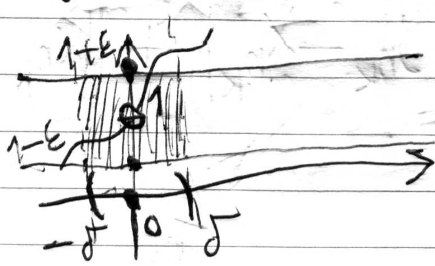
$\boxed{\text{Def:}}$ $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $a \in \underbrace{D_f'}_{\text{ért. tart. torlódási pontja.}} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; $A \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_a f = A :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_f ,\ f(x) \in k_\varepsilon(A) .$$

Mjg. ha $x \sim a \Longrightarrow f(x) \sim A$.

Spec. esetek: 9 eset; absz.-értékkel is megfogalmazható

$\boxed{1.F}$ (a) $\lim_0 f = 1$



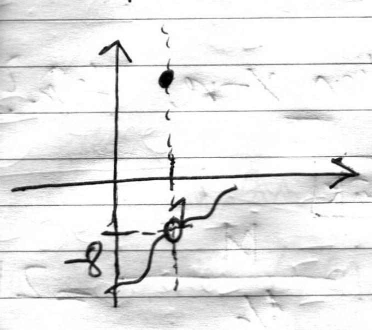
környezetekkel:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$
$\forall x \in (k_\delta(0) \setminus \{0\}) \cap D_f$
$f(x) \in k_\varepsilon(1)$.

Absz. értékkel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f :$

$0 < |x - 0| < \delta, \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$

(b) $\lim\limits_{1} f = -8$



Környezetekkel:

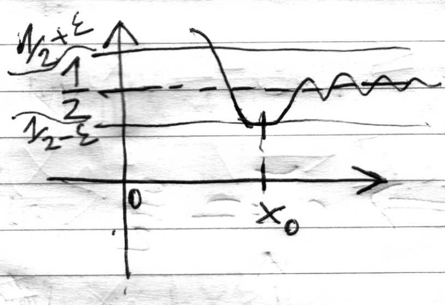
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (k_\delta(1) \setminus \{1\}) \cap D_f :$

$f(x) \in k_\varepsilon(-8).$

Absz. értékkel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, \ 0 < |x-1| < \delta,$

$|f(x) - (-8)| < \varepsilon.$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$



Környezetekkel:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$

$\forall x \in k_\delta(+\infty) \cap D_f :$

$f(x) \in k_\varepsilon(1/2).$

Absz. értékkel:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists x_0 : \forall x \in D_f,$

$x > x_0 : \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$

$\boxed{\text{2. F.}}$ Definíció alapján:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = ?$ Sejtés: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$

Biz.: $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \delta > 0$, $\forall x \in D_f$, $0 < |x| < \delta$

(*) $\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon$.

$(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta)$

Adott $\varepsilon > 0$ esetén (*) milyen x-re telj.?

A (*) megoldása helyett: $\boxed{\text{növeljük}}$

$$\left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| = \frac{|x|}{|1+x|} \leq \frac{|x|}{1/2} = 2|x| < \varepsilon$$

$|1+x| \geq \frac{1}{2}$!

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

-1 0 1

$\Updownarrow$

$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \delta := \frac{\varepsilon}{2}$ „jó" választás.

$\delta \leq \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

Sejtéshez: ha $x \sim 1 \Rightarrow \sim \frac{0}{0}$.

„kicsi számok hányadosa"!

→ ÁTALAKÍTANI!! $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$:

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2} \overset{!!}{=} \frac{\overbrace{(x^2-1)}^{(x-1)(x+1)}(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{(x-2)}$$

Ha $x \sim 1 \Longrightarrow \sim -8$

Sejtés: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x-3}{x^2-3x+2} = -8$.

Biz.: Igazolni kell: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\},\ 0 < |x-1| < \delta$.

$$\left| \frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2} - (-8) \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2} - (-8) \right| = \left| \frac{x^3+x^2+11x-13}{x-2} \right| \overset{**}{=}$$

$$x^3+x^2+11x-13 = \underbrace{(x^3-1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + \overbrace{(x^2-1)}^{(x+1)(x-1)} + 11(x-1) =$$

$$= (x-1)\left[x^2+2x+13\right]$$

$$** = |x-1| \cdot \left| \frac{x^2+2x+13}{x-2} \right| \leq |x-1| \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{2} + 13}{1/2}$$

$x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ ($\frac{1}{2}$, 1, $3/2$, 2)

$= c$

$= c|x-1| < \varepsilon$

Telj., ha $|x-1| < \frac{\varepsilon}{c}$ és $|x-1| \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0 \ldots$

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{1}{2}\right\} \quad \blacksquare$$