

3. Gyakorlat

1-2. Gyak.

8 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Hatványsorral

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots$$

$$= \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

ez a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$
konv.

hatványsor összege - nek a h.é - re ...

...
von
folgt.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

($x \in \mathbb{R}$)

Sei es: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Biz: ~~...~~ $e^x > x$
($x > 0$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ + minoráns - kritika

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty}$
($y = x$)

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2x}{x - \sin x}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots} = \frac{\frac{2}{3!} + 2 \frac{x^2}{5!} + 2 \frac{x^4}{7!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots}$$

$x \rightarrow 0 \quad \frac{1}{3!}$

(e) HF!

Polytonosság.

(3.4. gyakorlat).

$$\text{Eml.: } f \in C\{a\} \quad a \in D_f \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad |x - a| < \delta \end{cases}$$

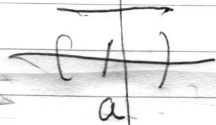
$$\textcircled{1. F.} \quad f \notin C\{a\} \quad a \in D_f \quad \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in D_f : \\ |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

szemléltetés:

!!

2.F. $f \in C\{a\} \iff \exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \forall x \in D_f,$
 $|x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

!!

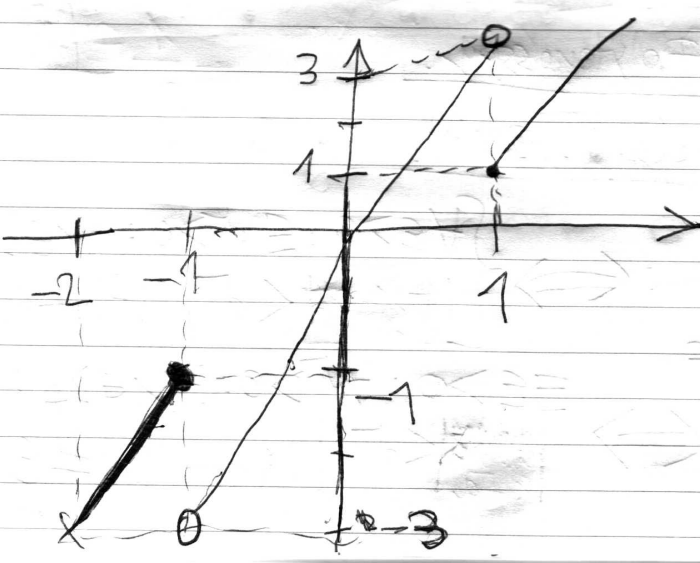


$\exists \delta > 0 :$
 $f(x) \equiv f(a)$
 $\forall x \in D_f :$
 $|x-a| < \delta.$

$\Rightarrow$ NEM ekv. a folt,
 PEDIG CSAK..

3.F. $f(x) := \begin{cases} 2x+1, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

folt.
vizsg.



$f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ✓

$a=1$ -ben:

Egyoldali h.é.-ek:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x-1) = 1$$

~~lim f(x)~~ $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 3x = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \notin C\{1\}$

f folytonos jobbról: u.i. $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$

balról nem folyt.: u.i. $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq f(1)$

[4.F.] $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2^2, & x < 4 \\ 2x + 20, & x \geq 4 \end{cases}$

$2 \in \mathbb{R}$
Parameter

folyt. vizsg.

Neo. 1. $f \in C\{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ és $\forall 2 \in \mathbb{R}$

2. $a=4$ -ben.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} (x^2 - 2^2) = 16 - 2^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} (2x + 20) = 4 \cdot 2 + 20$$

$$f \in C\{4\} \Leftrightarrow 16 - 2^2 = 42 + 20 \Leftrightarrow$$

$$2^2 + 42 + 4 = 0 \Leftrightarrow (2+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2 = -2}$$

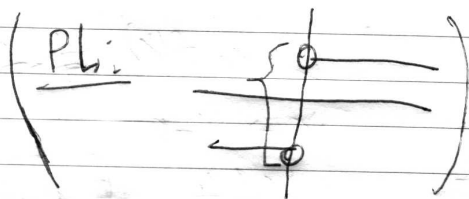
Teljes: $f \in C\{4\} \Leftrightarrow \boxed{2 = -2}$

• Ha $2 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \Rightarrow f \notin C\{4\}$

$\Rightarrow$ 4 szakadási hely: elsőfajú

szakadási hely

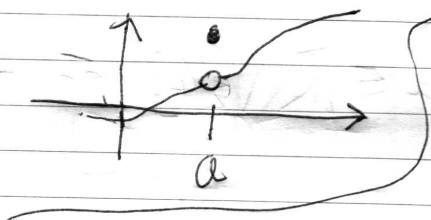
U.i. $\exists$ és véges: $\lim_{4+0} f \neq \lim_{4-0} f$



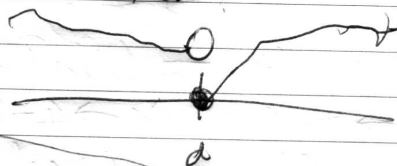
f ugrása a 4-ben:

$$\lim_{4+0} f - \lim_{4-0} f = 16 - 20 = -4$$

Eml.: megszüntethető szakadási hely:



• elsőfajú szakadási hely:



• másodikfajú szak. hely.

sokféle képpen lehet ~~megoldani~~

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \\ \frac{x^2 - 7x + 10}{(x-2)(x-5)} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}.$$

$x=2, x=5$

ÍTM: $f \in C\{a\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \checkmark$

$a=2, a=5$ külön.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} \rightarrow \begin{matrix} \text{h.é.} \\ \text{2-ben} \\ \text{5-ben.} \end{matrix}$$

IF!