

4. Gyakorlat

Eml. Folytonosság, szakadási helyek;

$$\boxed{F.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \\ \text{d.}, & x = 2 \vee x = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x \in \mathbb{R}) \\ \text{Rár.} \end{matrix}$$

Meo. $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

$$f \in C\{x_0\}, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$$

1. műv. tételek + elemi fv. ✓

$$x_0 = 2 \quad \vee \quad x_0 = 5$$

H.é. vizsg.

$$\boxed{x_0 = 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{0}{0}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}: \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \quad 2 \in D_f \cap D_{f'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \in C\{2\} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f = \frac{1}{3} = f(2) = \frac{1}{3}$$

$$f \in C\{2\} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ha $\frac{1}{3} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \Rightarrow f \notin C\{2\}$: 2. szakadási hely megszakított hely

~~Ha~~ $x_0 = 5$ -ben? $\lim_{x \rightarrow 5} f$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} f(x) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 5} f \Rightarrow f \notin C\{5\}$$

5: másodfajú szak. hely.

Összefoglalás:

$$\bullet f \in C\{x_0\}, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \forall \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\bullet f \in C\{2\} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ha $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$: 2. megsz.

$$\bullet f \notin C\{5\} \quad \forall \frac{1}{3} \in \mathbb{R}; 5: \text{másodfajú szak. hely.}$$

$$f(x) := x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow F \in C\{0\}$$

F az f kiterjesztése

$$\text{Míg: } f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

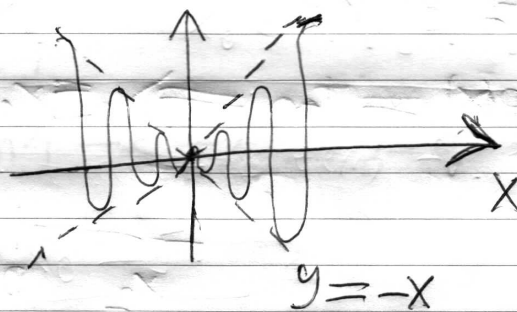
fv. képe.

$$y = x$$

$$\sin \frac{1}{x} = 1$$

$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$



$$\Rightarrow \frac{2k+1}{2} \pi \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{2k+1}{2} \pi} = \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

- Eml.: - Weierstrass
 - Bolzano tétel.
 - Heine tétel.

F. Biz. be: Ha $P(x)$ páratlan fokú polinóm
 akkor $P(x)$ -nek van valós gyöke.

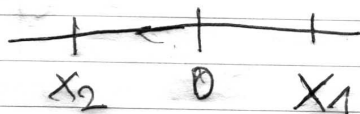
Mj.: - algebra alaptétel; polinóm komplex
 gyökei.

~~kérdés~~ kérdés: Valós e.á. polinóm valós
 gyökeiről mit lehet mondani?

Biz.: $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_0$; $a_i \in \mathbb{R}$;
 $a_{2n+1} > 0$.

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \end{array} \right\}$ ISMÉTLEÉS!

$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_1 > 0 : P(x_1) > 1$
 $\cdot P(x_1)$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_2 < 0 : P(x_2) < -1$

folvt. $\left. \begin{array}{l} P \text{ folyt.} \\ P \text{ } [x_2, x_1] \\ P(x_2) < 0, P(x_1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{BOLZANO} \Rightarrow *$

$$\textcircled{*} \exists \xi \in (x_2, x_1): \boxed{P(\xi) = 0}$$

Mjvs $\boxed{F}$ Biz. be: $\ln x = e^x - 3$

egyenletnek van gyöke $I(1,2)$ int.-en.

Eml. ① e^x ($x \in \mathbb{R}$)

$\ln x$ ($x > 0$) av.



② Bolzano-tétel: $f(x) = 0$ egyenlet gyökere-
iről.

~~Mjvs~~ meo $\therefore f(x) := \ln x - e^x + 3$ $x \in [1, 2]$

f folytonos $[1, 2]$ -~~on~~ $\left. \begin{matrix} \text{Bolzano} \\ \text{Ha } f(1) \cdot f(2) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ all.

$f(1), f(2)$

$f(1) = \ln 1 - e + 3 = 3 - e^{\sim 2.78} > 0,$

$\boxed{f(1) > 0}$

$f(2)$

$f(2) = \ln 2 - e^2 + 3$

Közelítőleg: $0,69 - 7,39 + 3$

$\Rightarrow \boxed{f(2) < 0} \Rightarrow$ Bolzano alkalmazható $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists$ gyök $(1, 2)$ -~~on~~.

1. Mj: $\ln 2 - e^2 + 3 < 0$ igazolása gép nélkül!

2. Mj: A gyökök számáról nincs szó.

3. Mj: Felzési eljárás!

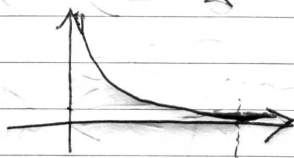
A gyök közelítésére (L. F. 43.)

Egyenletes folytonosság:

Eml. ① f Av. egyenletesen folytonos az $A \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\forall x, y \in A: |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

② pl.: $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in (0, 1)$) nem folyt.



○

F.

$$f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$$

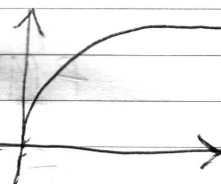
Egyenletesen folytonos-e?

Meo.:

kérdés: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$

folytonos-e?

Kicsi-e, ha x és y közel vannak egymáshoz?



$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}| =$$

$$= \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \stackrel{!!}{\leq} \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \text{***}$$

~~***~~ $(**) \sqrt{|x-y|} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \sqrt{|x-y|}$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \varepsilon > 0$ számhoz $0 < \delta < \varepsilon^2$ $\Leftrightarrow |x-y| < \varepsilon^2$
 "jó választás",
 azaz $(*)$ teljesül $\forall x, y \geq 0$ esetén $\Rightarrow$

$$\boxed{\sqrt{x} \quad (x \geq 0)}$$

Egyenletesen
folyt.