12. Gyakorlat

Integrálszámítás

Határozatlan integrál — Határozott integrál.

Primitív fv.-ek

(Határozatlan integrál).

Eml. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum;

$f: I \to \mathbb{R}$ adott fv;

? $F: I \to \mathbb{R}$, $F \in D(I)$, $F'(x) = f(x)$.

az f. primitív fv.-e.

Mj.: A deriválás megfordítása.

Eml.: A szorzat fv. der. szabálya.

Parciális integrálás elve

T.f.h. $f, g \in D(I)$ és $f'g$-nek van prim. fv.-e; $\Rightarrow$ $f \cdot g'$-nek is van prim. fv.-e, és:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \boxed{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

ui. $\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)' = \cancel{f'(x)g(x)} + f(x)g'(x) - \cancel{f'(x)g(x)}$.

A parciális integrálás elve alkalmazható a következő esetekben:

1. Típus:

$$\int \underbrace{P(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \\ \operatorname{sh} \alpha x \\ \operatorname{ch} \alpha x \end{Bmatrix}}_{g'(x)} dx$$

Polinom

Példa:

$$\int x^2 \sin(2x)\,dx = -\frac{x^2\cos 2x}{2} -$$

$f(x) = x^2 \quad g'(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2x \quad g(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$-\int 2x\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx = -\frac{x^2\cos 2x}{2} +$$

$$+\int x \cos 2x\,dx = -\frac{x^2\cos 2x}{2} +$$

$f(x) = x \quad g'(x) = \cos 2x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = \frac{\sin 2x}{2}$

$$+\left[\frac{x\sin 2x}{2} - \int\frac{\sin 2x}{2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2\cos 2x + x\sin 2x\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{2. Típus}}$

$$\int e^{\alpha x}\cdot\begin{Bmatrix}\sin\beta x\\ \cos\beta x\\ \mathrm{sh}\,\beta x\\ \mathrm{ch}\,\beta x\end{Bmatrix}dx.$$

Példa:

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - \int (-e^{-x}) \cdot$$

$f(x) = e^{-x}$; $g'(x) = \cos x$

$f'(x) = -e^{-x}$; $g(x) = \sin x$

$$\cdot \sin x \, dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx \overset{!!}{=}$$

$f(x) = e^{-x}$; $g'(x) = \sin x$

$f'(x) = -e^{-x}$; $g(x) = -\cos x$

$$= e^{-x} \cdot \sin x + \left[-e^{-x} \cos x - \int (-e^{-x}) \cdot (-\cos x) dx \right] =$$

$$= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$2 \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + C$$

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$$

$\boxed{\text{3: típus}}$

$$\int \left\{ \begin{matrix} \ln x \\ \text{arctg}\, x \\ \arcsin x \\ \vdots \end{matrix} \right\} dx$$

Inverz fv.

Példa:

$$\int \ln x \, dx \overset{\text{CSEL}}{=} \int 1 \cdot \ln x \, dx =$$

$g'(x) = 1$ | $f(x) = \ln x$

$g(x) = x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$= x \ln x - \int \boxed{\frac{1}{x} \cdot x} dx = x \ln x - x + C.$$

Ell.:

Mj.: Más esetekben is használható:

Pl.: $\int x^5 e^{x^3} dx \overset{\text{CSEL}}{=} \frac{1}{3}\int \underbrace{x^3}_{f(x)} \cdot \underbrace{\boxed{3\cdot x^2 \cdot e^{x^3}}}_{g'(x)} dx$

$f'(x) = 3x^2, \quad g(x) = e^{x^3}$

$= \frac{1}{3}\left(x^3 e^{x^3} - \int \boxed{3x^2 \cdot e^{x^3}} dx\right) =$

$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - e^{x^3} + C$

Néhány típus:

$\frac{f'}{f}$ alakú:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$$

$(x \in I)$, $f(x) > 0$

Pl.: $\int\limits_{x \in (-\pi/2, \pi/2)} \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln \cos x + c$$

- $f^{\alpha} \cdot f'$

$$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) > 0$ $(x \in I)$.

Pl.: $$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{(tg\,x)^3}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (tg\,x)^{-3/2}\,dx = \frac{(tg\,x)^{-3/2+1}}{-3/2+1}$$

$+C$.

1. Helyettesítési szabály

(*) $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

F a f prim. fv.-e. $(F' = f)$

Mj.:
- $f^{\alpha} \cdot f'$
- $\frac{f'}{f}$ (*) spec. esete.