

ANALÍZIS II.

TÉTELEK ÉS BIZONYÍTÁSOK

Kidolgozta: Ábrahám Róbert
Dr. Szili László előadásai alapján

2011. február 11.

1. tétel. Intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete intervallum:

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos I -n. Ekkor R_f is intervallum.

Bizonyítás. Legyen $M := \sup R_f$, $m := \inf R_f$. Igazoljuk, hogy $(m, M) \subset R_f$. Legyen $y_0 \in (m, M)$. Ekkor $\exists x_0 < x_1 \in I : f(x_0) < y_0 < f(x_1)$. Tekintsük $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt. A Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (x_0, x_1) : f(\xi) = y_0$, így $y_0 \in R_f$, amiből az következik, hogy $(m, M) \subset R_f$, emiatt pedig

$$R_f = \begin{cases} (m, M) \\ [m, M] \\ (m, M] \\ [m, M) \end{cases}.$$

□

2. tétel. Heine:

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -on (az intervallum korlátos és zárt). Ekkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ -on.

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Adott $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) : $\exists x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ (#). Itt $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$ korlátos sorozat, és a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel felhasználásával következik, hogy $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, melyre $\lim (x_{n_k}) =: \alpha$. Ekkor $\alpha \in [a, b]$ (indirekt). De ekkor $|y_{n_k} - \alpha| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k}} +$

$\underbrace{|x_{n_k} - \alpha|}_{\downarrow 0} \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} \alpha \implies \lim (y_{n_k}) = \alpha$. De $\alpha \in [a, b]$ és $f \in C\{\alpha\}$, amiből az átviteli elv alapján következik,

hogy $\left. \begin{matrix} x_{n_k} \rightarrow \alpha \implies f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha) \\ y_{n_k} \rightarrow \alpha \implies f(y_{n_k}) \rightarrow f(\alpha) \end{matrix} \right\} \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} 0$, ami ellentmond (#)-nek! □

3. tétel. A differenciálhatóság átfogalmazása lineáris közelítéssel:

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D_f$. Ekkor $f \in D\{a\} \iff \exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \ (\forall x \in D_f)$. Ekkor $A = f'(a)$.

Bizonyítás. $\boxed{\implies}$: $f \in D\{a\} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) (\in \mathbb{R}) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{=: \varepsilon(a+h)} - A \right) = 0$, ezért

$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(a+h) = \lim_{x=a} \varepsilon(x) = 0$. Emellett $f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(a+h) \cdot h$, azaz $f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$.

$\boxed{\impliedby}$: Tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$, ezért $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \ (x \in D_f, x \neq a)$, azaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = A \implies f \in D\{a\}$. □

Megjegyzések:

$$\bullet \quad f(x) - f(a) = \underbrace{A(x-a)}_{a \text{ megváltozás főtagja}} + \underbrace{\varepsilon(x)(x-a)}_{\text{maradéktag}};$$

- A szelők határhelyzete $\rightarrow$ érintő (geometriai szemlélet alapján).

4. tétel. Kapcsolat a folytonosság és a differenciálhatóság között:

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D_f$. Ekkor:

1. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $f \in C\{a\}$;
2. A megfordítás nem igaz.

Megjegyzés: a deriválhatóság „erősebb” fogalom, mint a folytonosság.

Bizonyítás. 1.: $f \in D\{a\} \xrightarrow{\text{Lineáris közelítés}} \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon \in D_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon = 0 : f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) (\forall x \in D_f)$. Mivel $x \rightarrow a$, így $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ezért $f \in C\{a\}$.

2.: A megfordítás nem igaz $\rightarrow$ ellenpélda: $abs \in C\{0\}$, de $abs \notin D\{0\}$. $\square$

5. tétel. Differenciálható függvények összege és szorzata (másképpen: az algebrai műveletek és a deriválás kapcsolata):

Legyen $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } (D_f \cap D_g)$, $f, g \in D\{a\}$. Ekkor:

1. $f + g \in D\{a\}$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $\lambda f \in D\{a\}$ és $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);
3. $fg \in D\{a\}$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
4. Ha még $g(a) \neq 0$ is teljesül, akkor $\left(\frac{f}{g}\right) \in D\{a\}$ és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Megjegyzés: szavakkal is megjegyezni!

Bizonyítás. 1.: $a \in \text{int } (D_f \cap D_g) = \text{int } D_{f+g}$. Ekkor $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$

$\frac{g(x) - g(a)}{x-a}$, emiatt pedig $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

2.: Az előzőhöz hasonlóan igazolható;

3.: $a \in \text{int } (D_f \cap D_g) = \text{int } D_{fg}$. Ekkor $\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \stackrel{\text{csel}}{=} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\downarrow x \rightarrow a, f'(a)} + \underbrace{f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{\downarrow x \rightarrow a, g'(a)}$ (ugyanis $g \in C\{a\}$), ebből az következik, hogy $(fg)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

4.: Először $\frac{1}{g}$ függvényre! Ha $g(a) \neq 0$, $a \in \text{int } D_g$, $g \in D\{a\} \rightarrow g \in C\{a\}$, emiatt $\exists k(a) : g(x) \neq 0 (\forall x \in k(a))$, ezért $a \in \text{int } D_{\frac{1}{g}}$. Ekkor $\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(a)}$, azaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} =$

$-\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \left(\frac{1}{g}\right)'(a)$, emiatt pedig $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \xrightarrow{\text{elző szorzat}} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$. $\square$

Következmények:

1. $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ($x \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). Ekkor $\forall x_0 \in \mathbb{R}, P \in D\{x_0\}$ és $P'(x) = a_1 + 2a_2x_0 + \dots + na_nx_0^{n-1}$ ($x_0 \in \mathbb{R}$);
2. Racionális törtfüggvények: $r(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ ($p(x), g(x)$ polinomok) az értelmezési tartomány minden pontjában deriválható;

$$3. \tan' x = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\overbrace{\sin' x}^{\cos x} - \overbrace{\sin x \cos' x}^{-\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ ezért } \forall x \in D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan \in D\{x\} \text{ és } \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

A differenciálszámítás középérték-tételei

6. tétel. Rolle-féle középérték-tétel:

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. $f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Weierstrass}} \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = \min_{[a, b]} f =: m, \exists \beta \in [a, b] : f(\beta) = \max_{[a, b]} f =: M.$

1. eset: $m = M \implies f = \text{állandó} \implies f' = 0$;

2. eset: $m < M$ és $f(a) = f(b)$. Ha $m \neq f(a) = f(b)$, akkor $\alpha \in (a, b) \implies \alpha$ lokális minimum is, így $f'(\alpha) = 0$. Ha $M \neq f(a) = f(b)$: hasonlóan. $\square$

7. tétel. Cauchy-féle középérték-tétel:

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C[a, b]$, $f, g \in D(a, b)$, $g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Bizonyítás. 1.: $g(b) \neq g(a)$, ugyanis ha $g(a) = g(b)$, akkor a Rolle-tétel alapján $\exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$, ami ellentmondás.

2.: ötlet: $F(x) := f(x) - \lambda g(x)$ ($x \in [a, b]$) és a λ megválasztható úgy, hogy a Rolle-tétel feltételei teljesüljenek: $F \in C[a, b]$, $F \in D(a, b)$, $F(a) = F(b)$ is igaz, ha $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, ezért $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Ekkor a Rolle-tétel alapján következik, hogy $\exists \xi \in (a, b) : 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) \implies \text{állandó}$. $\square$

8. tétel. Lagrange-féle középérték-tétel:

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bizonyítás. Lásd a Cauchy-féle középérték-tételt ($g(x) := x$). $\square$

A monotonitásra vonatkozó elégséges, szükséges és elégséges feltételek

9. tétel. A monotonitásra vonatkozó elégséges feltétel:

Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D(a, b)$ (D_f nyílt intervallum). Ekkor:

1. Ha $f' \geq 0$ (a, b)-n, akkor f monoton növekvő (a, b)-n;
2. Ha $f' > 0$ (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton növekvő (a, b)-n;
3. Ha $f' \leq 0$ (a, b)-n, akkor f monoton csökkenő (a, b)-n;
4. Ha $f' < 0$ (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton csökkenő (a, b)-n.

Bizonyítás. Mindegyiket a Lagrange-féle középérték-tétel alapján: ekkor $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. A Lagrange-féle középérték-tételt alkalmazva $[x_1, x_2]$ -re: $\exists \xi \in (a, b) : f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$ előjel-viszonyából.

Megjegyzések:

- A monotonitás a derivált előjeléből vizsgálható;
- Lényeges, hogy D_f nyílt intervallum legyen (például: $f(x) := \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$);
- Visszafelé nem feltétlenül igazak az állítások!

$\square$

10. tétel. Szükséges és elégséges feltétel a monotonitásra:

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$. Ekkor:

1. f monoton növekvő $[a, b]$ -n $\iff f' \geq 0$ (a, b) -n;
2. f monoton csökkenő $[a, b]$ -n $\iff f' \leq 0$ (a, b) -n;
3. f szigorúan monoton növekvő $[a, b]$ -n $\iff \begin{cases} (1) & f' \geq 0 \text{ } (a, b) \text{-n} \\ (2) & \nexists (c, d) \subset [a, b] : f'(x) = 0 \text{ } (x \in (c, d)) \end{cases}$.

Bizonyítás. Nem kell (megfontolható). □

Lokális szélsőértékek

11. tétel. A lokális szélsőérték létezésére vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel és elsőrendű elégséges feltétel:

Szükséges: legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D_f$, $f \in D\{a\}$. Ha az f függvénynek az a -ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

Elégséges: legyen $f \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D(a, b)$. Ha f' a $c \in (a, b)$ pontban előjelet vált, akkor c lokális szélsőérték.

Bizonyítás. Szükséges: lokális maximumra. Tekintsük az $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ törtet:

- $x > a : f(x) - f(a) \leq 0$ és $x - a > 0 \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) \leq 0$;
- $x < a : f(x) - f(a) \leq 0$ és $x - a < 0 \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a) \geq 0$;
- De $f \in D\{a\} \implies f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a) \implies f'(a) = 0$.

Elégséges:

1. Ha f' c -ben előjelet vált $\boxed{-}$ -ből $\boxed{+}$ -ba, akkor $\exists \delta > 0$:
 - (a) $f'(x) \leq 0$ $(x \in (c - \delta, c]) \implies f$ monoton csökkenő $(c - \delta, c]$ -n;
 - (b) $f'(x) \geq 0$ $(x \in [c, c + \delta)) \implies f$ monoton növekvő $[c, c + \delta)$ -n;

Amiből az következik, hogy c lokális minimumhely.

2. Ha f' c -ben előjelet vált $\boxed{+}$ -ból $\boxed{-}$ -ba: hasonlóan az 1-eshez.

□

Primitív függvények

12. tétel. Az $e^x \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) primitív függvényének előállítás:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

Bizonyítás. $(f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x, g'(x) = \sin x \implies g(x) = -\cos x, g'(x) = \cos x \implies g(x) = \sin x)$. Ekkor $\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$, amiből az következik, hogy $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$. □

13. tétel. A $\sqrt{1-x^2}$ ($x \in (-1, 1)$) primitív függvényeinek előállítás:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c \text{ } (x \in (-1, 1)).$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sin t = g(t)$. Ekkor $\exists g^{-1}(x)$, és $g^{-1}(x) = \arcsin x = t$ ($t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Ekkor $g'(t) = \cos t$, és $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt|_{t=\arcsin x} = \int \cos^2 t|_{t=\arcsin x} = (\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})|_{t=\arcsin x} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x)}{2} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c \implies \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$ ($x \in (-1, 1)$). $\square$

Integrálhatóság

1. definíció. Oszcillációs összeg:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$ -nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az f függvény τ -hoz tartozó alsó, illetve felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege.

14. tétel. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel:

$f \in [a, b] \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in F([a, b]) : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Bizonyítás. $\boxed{\Leftarrow}$: $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, \tau) - s(f, \tau) = \Omega(f, \tau) < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$), amiből az következik, hogy $I^*(f) = I_*(f) \implies f \in R[a, b]$.

$\boxed{\Rightarrow}$: $I^*(f) = I_*(f) =: I$, ekkor:

- $I_*(f)$ sup tulajdonság $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1 \in F([a, b]) : I - \varepsilon < s(f, \tau_1) \leq I$;
- $I^*(f)$ inf tulajdonság $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_2 \in F([a, b]) : I \leq S(f, \tau_2) < I + \varepsilon$.

Tekintsük $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ halmazt. Ekkor $I - \varepsilon < s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau) \leq S(f, \tau) \leq S(f, \tau_2) < I + \varepsilon \implies \Omega(f, \tau) < \varepsilon$. $\square$

15. tétel. Folytonos függvény integrálható:

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor f Riemann-integrálható.

Bizonyítás. $f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Heine-tétel}} f$ egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (*). Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített és $\tau := \{x_0, \dots, x_n\} \in F([a, b]) : |x_k - x_{k-1}| < \delta$ ($k = 1, \dots, n$). Ekkor $|\Omega(f, \tau)| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| = \sum_{i=1}^n \sup |f(x) - f(y)| \cdot (x_i - x_{i-1}) \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$, amiből az következik, hogy $f \in R[a, b]$.

$$\left(\left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) = \sup |f(x) - f(y)|, x, y \in [x_i, x_{i-1}] \right) \quad \square$$

16. tétel. Monoton függvény integrálható:

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton $[a, b]$ -n, akkor $f \in R[a, b]$.

Bizonyítás. Oszcillációs összegekkel. Tegyük fel, hogy f monoton növekedő, $i = 1, \dots, n$, és $\forall \tau = \{x_i\} \in F([a, b])$. Ekkor $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1})$ és $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$. Ekkor $\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \varepsilon$, ha $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = \delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. $\square$

17. tétel. Newton-Leibniz tétel:

Ha $g \in R[a, b]$ és g -nek létezik primitív függvénye, akkor $\int_a^b g = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$ (G : a g primitív függvénye).

Bizonyítás. Legyen $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in F([a, b])$. $G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = (G(x_n) - G(x_{n-1})) + (G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})) + \dots + (G(x_1) - G(x_0)) \stackrel{\text{Lagrange-k.é.t.}}{=} \sum_{i=1}^n G'(\rho_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(\rho_i)(x_i - x_{i-1})$.
 $\forall \tau (\rho_i \in [x_{i-1}, x_i]) : s(g, \tau) \leq G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n g(\rho_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(g, \tau)$, amiből az következik, hogy
 $I_*(g) \leq G(b) - G(a) \leq I^*(g)$. Mivel $g \in R[a, b]$, ezért $I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g$, így $G(b) - G(a) = \int_a^b g$. $\square$